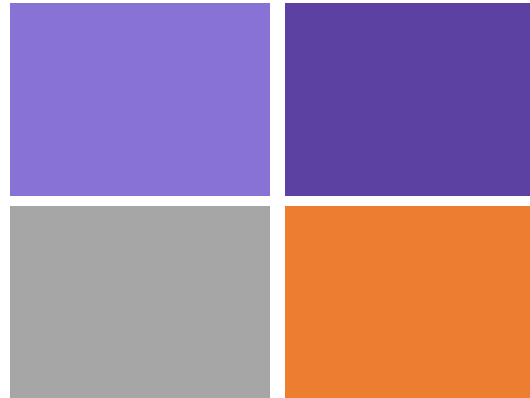


Semaine 6b

Contraintes et déformations
relatives pour poutre en flexion



PARTIE 1: (slide 4 - 25)

Contraintes et déformations relatives pour poutre en flexion

(en partie expliqué dans Chapitre 5 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 26 - 50)

Poutres: Moment quadratique (moment d'inertie)

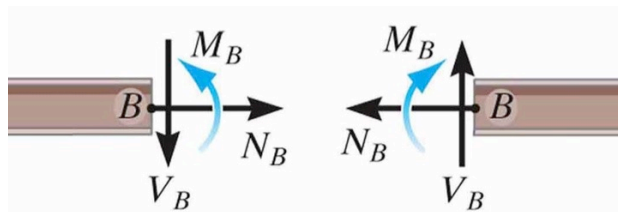
(en partie expliqué dans Chapitre 12 de Gere et Goodno)

PROGRAMME DU COURS, semaines 7-10

6	15.10	Force internes dans les poutres non-déformées. Méthode Section et différentielle	
6	17.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure Moment d'inertie	Série 6
7	29.10	Charge axiale. Poutre composite	Série 6
7	31.10	Quiz + Session questions & réponses	Série 1-5
8	05.11	Examen mi-semestre	
8	07.11	Flèche des poutres	Série 7
9	12.11	Flèche pour guidage flexible	Série 7
9	14.11	Systèmes indéterminés	Série 8
10	19.11	Flambage	Séries 8-9
10	21.11	Q&A	Série 9

Résumé du chapitre précédent (semaine 6a)

- $\frac{dV}{dx} = -q(x)$
- $\frac{dM_z}{dx} = V(x)$
- $M_z(x)$: Moment de flexion
- $V(x)$: Force de cisaillement
- $q(x)$: Charge distribuée (positif vers le bas pour relations différentielles)



C'était des poutres magiques sans "épaisseur" en y

Résumé chapitre actuel (semaine 6b)

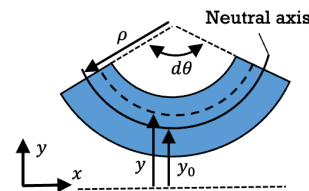
Poutre en flexion pure avec une épaisseur en y

■ Déformation Relative normale $\varepsilon_x(y)$:

$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

- y_0 : Position de l'axe neutre
- ρ : Rayon de courbure
- $\kappa = \frac{1}{\rho}$: Courbure
- $y - y_0$: Distance de l'axe neutre
- y_0 = l'axe neutre: centroïde de la section transverse pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y \, dydz}{A}$$



□ Contrainte normale $\sigma_x(x, y)$:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) = -E \frac{y - y_0}{\rho}$$

- I_{z,y_0} : Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe z passant par l'axe neutre y_0
- $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dydz$

■ $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

□ Contrainte normale maximum $\sigma_{x,max}$:

$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- c : Distance maximale vers l'axe neutre
- $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$: Module d'inertie élastique

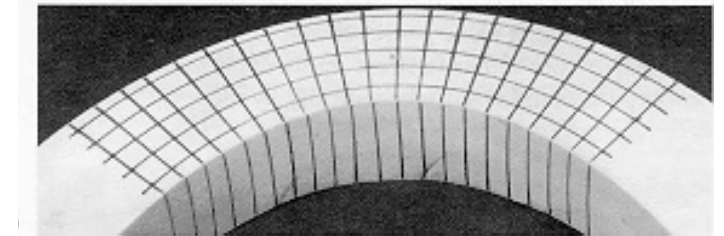
Semaine 6b –partie 1

Objectifs d'apprentissage

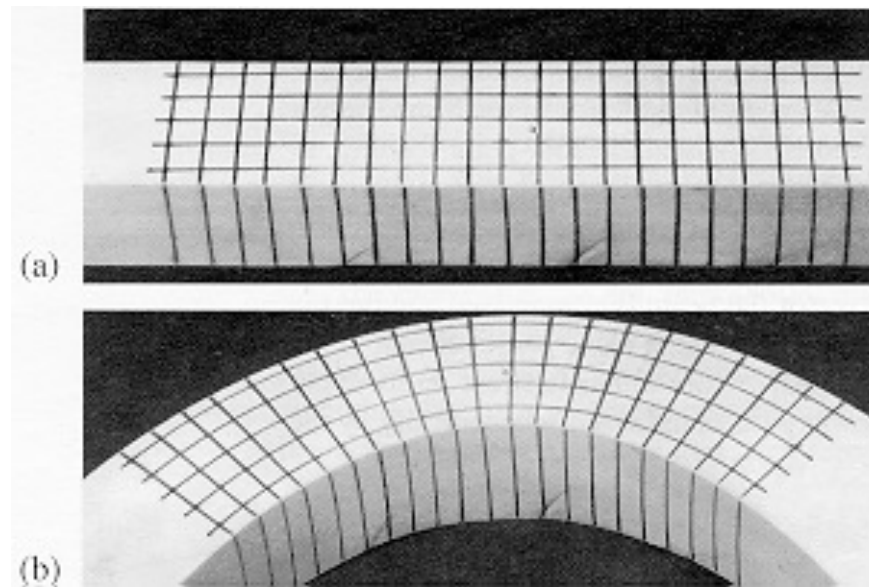
Savoir ce qu'est une Poutre en flexion pure

Pour les poutres en flexion pure:

- Exprimer $\varepsilon_x(y)$
- Définir et savoir trouver l'axe neutre
- Exprimer $\sigma_x(y)$



Déformation relative dans les poutres en flexion pure



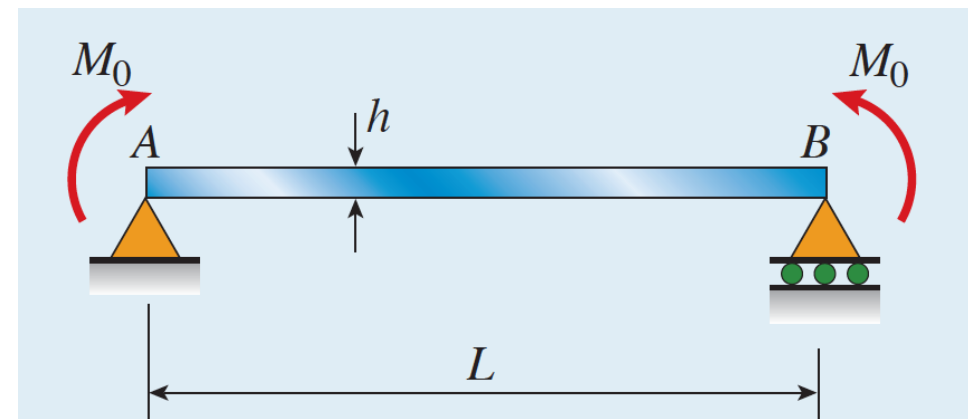
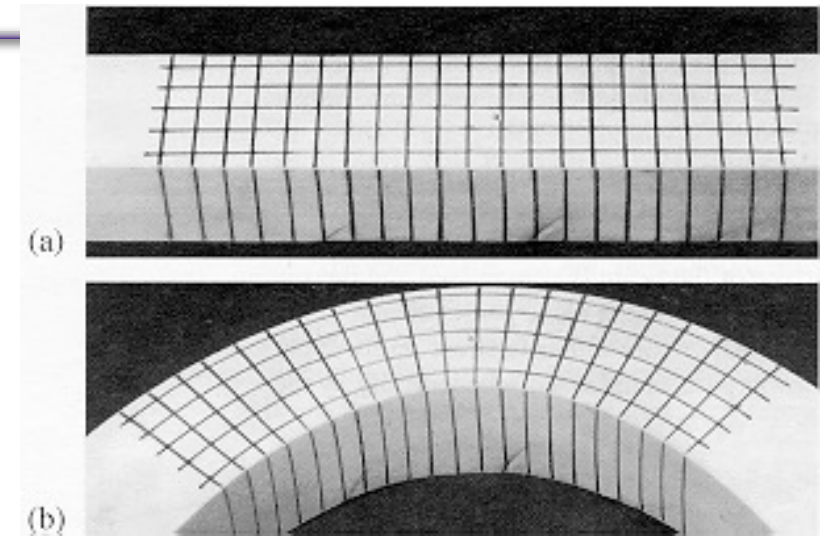
Pas de forces axiales pour le moment

Déformation relative dans une poutre en flexion pure

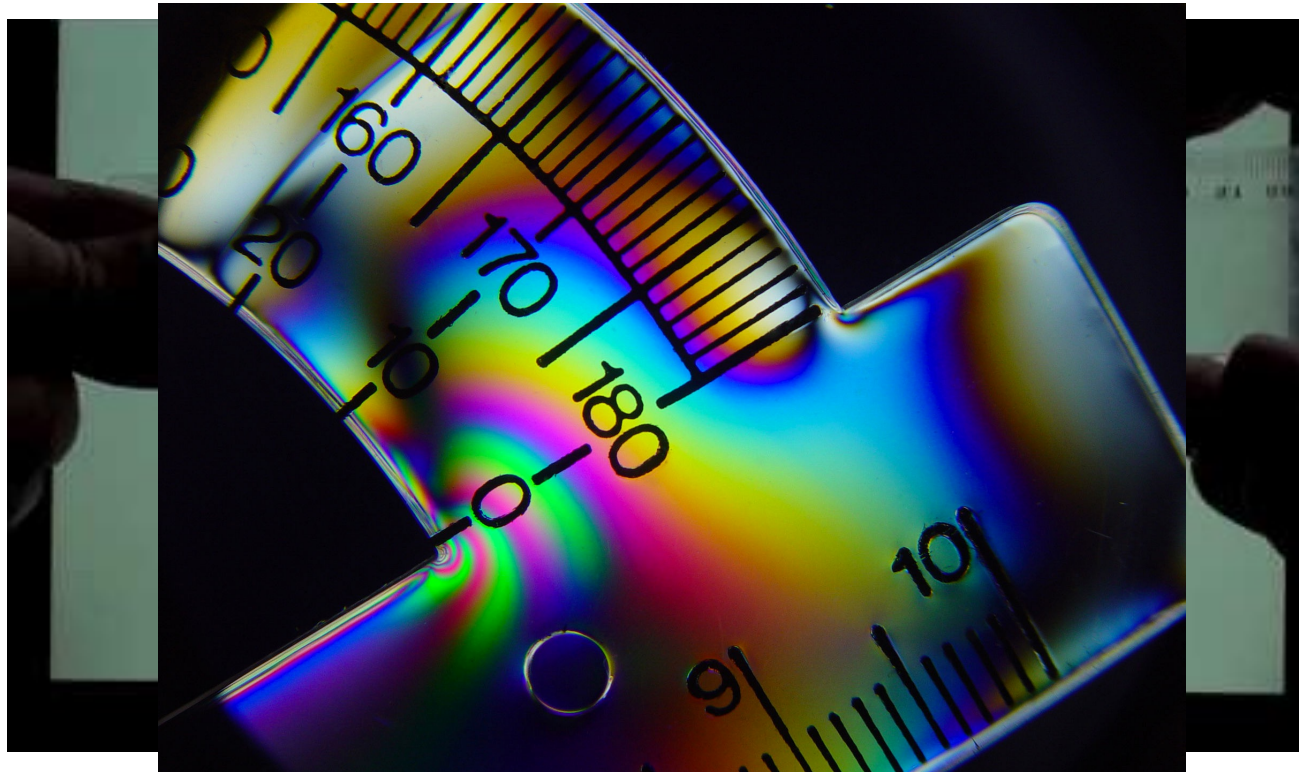
C'est quoi être en flexion pure ?

- Moment interne M_z non-nul et constant le long de la poutre. Pas de forces internes $V(x)$ ou $N(x)$
 - C-à-d : on « tord » les 2 extrémités de la poutre, sans tirer ou pousser
- La flexion ne crée pas d'élongation de l'axe neutre
- Une contrainte normale $\sigma_x(y)$ est la seule contrainte induite par la flexion
- Le niveau de contrainte dépend de y (en compression d'un côté, en traction de l'autre)

Mais heureusement, les équations de ces slides sont aussi valables pour toute poutre sans force normale interne, mais avec un $V(x)$



vous pouvez voir certaines contraintes internes !



https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelasticity#/media/File:Plastic_Protractor_Polarized_05375.jpg

<https://www.youtube.com/watch?v=Bv7HsJ4LbkA>

Source des vidéos des prochains slides

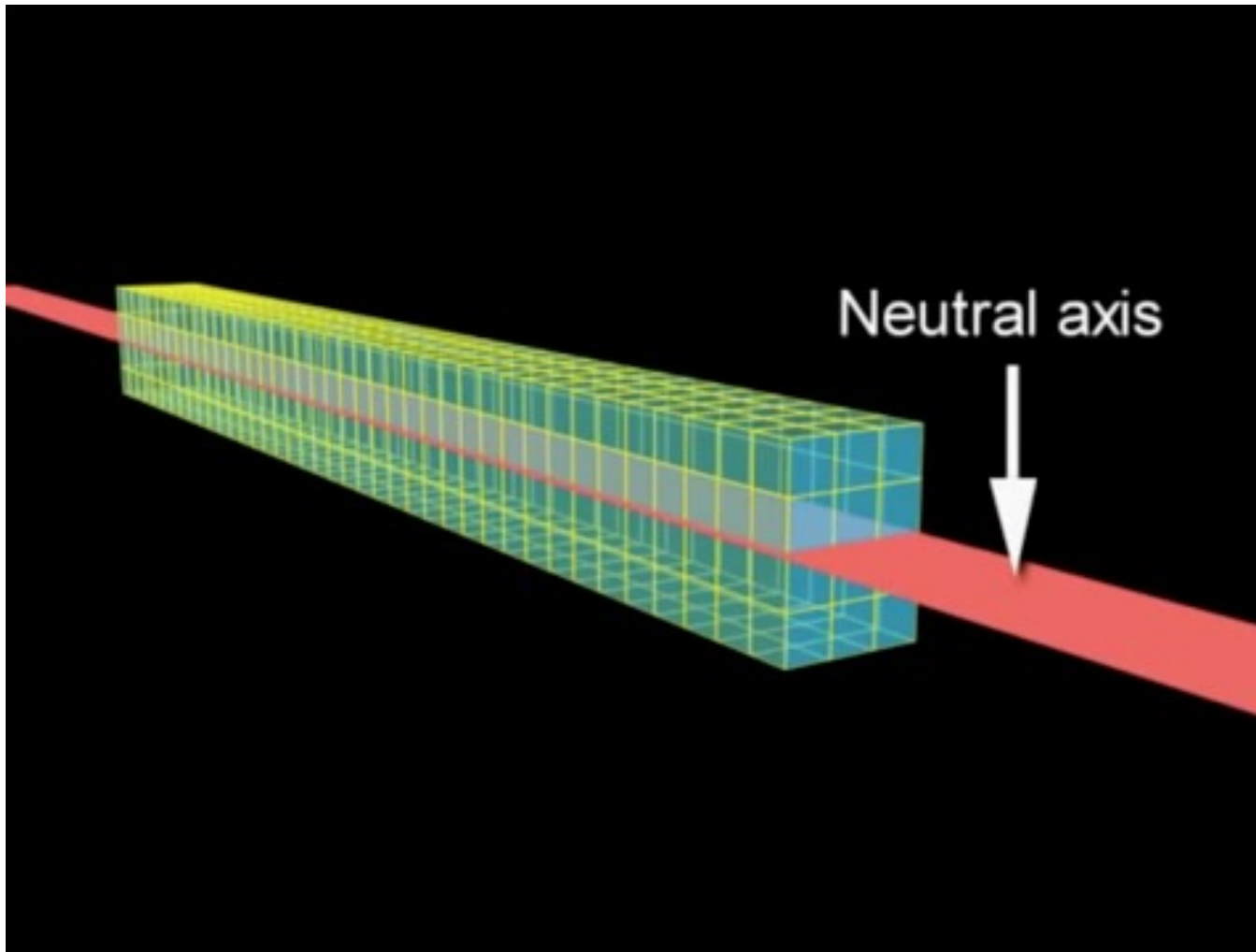
The Bending of Beams (10 part video series) was created
for CIV E 204: Mechanics of Solids 1
University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

AuthorG. Wayne Brodland
AnimatorJudy Sherwood
NarratorColin Campbell

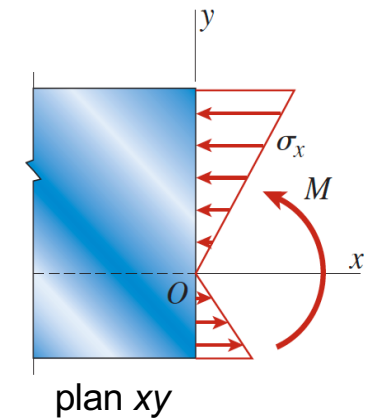
Permission is granted to use this video for educational purposes
only, provided it is unaltered and includes these credits.

© 2009 G W Brodland and J Sherwood

Déformation relative dans une poutre en flexion pure



<https://www.youtube.com/watch?v=9C9GFs5AK4c>



$$\epsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

Visualisation de la contrainte pour une poutre de section rectangulaire

y_0 = axe neutre

$y_0 = 0$ dans cette vidéo

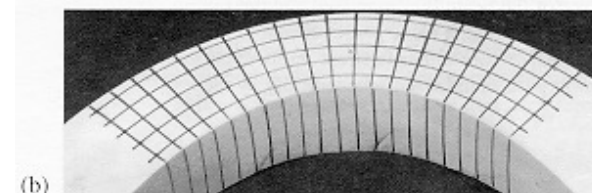
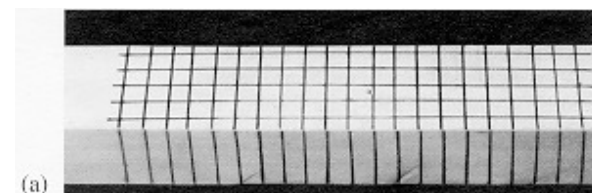
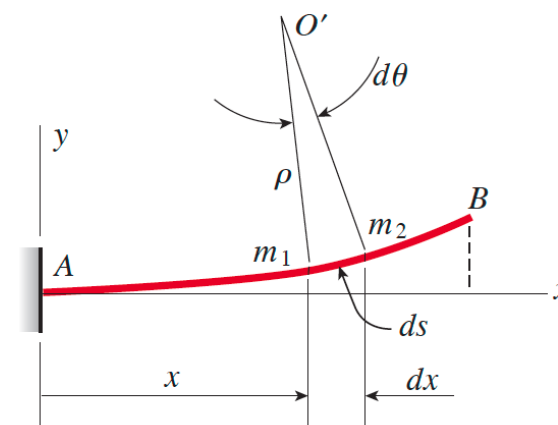
$\varepsilon_x(x,y)$: Déformation relative normale pour une poutre en flexion pure, en fonction de x et y

- Lorsqu'une poutre fléchit, nous pouvons définir localement un rayon de courbure ρ et une courbure $\kappa=1/\rho$
- Les sections de la poutre perpendiculaires à l'axe de la poutre avant la flexion resteront plan après pliage (c-à-d à x constant)
- Un côté (par ex ici le dessus) de la poutre va s'allonger, tandis que l'autre côté devient plus court.
- L'axe où il n'y a pas d'allongement est appelé **axe neutre** et passe à travers le **centroïde** de la poutre

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$



(a)



Axe Neutre (poutre simple) et déformation relative selon y

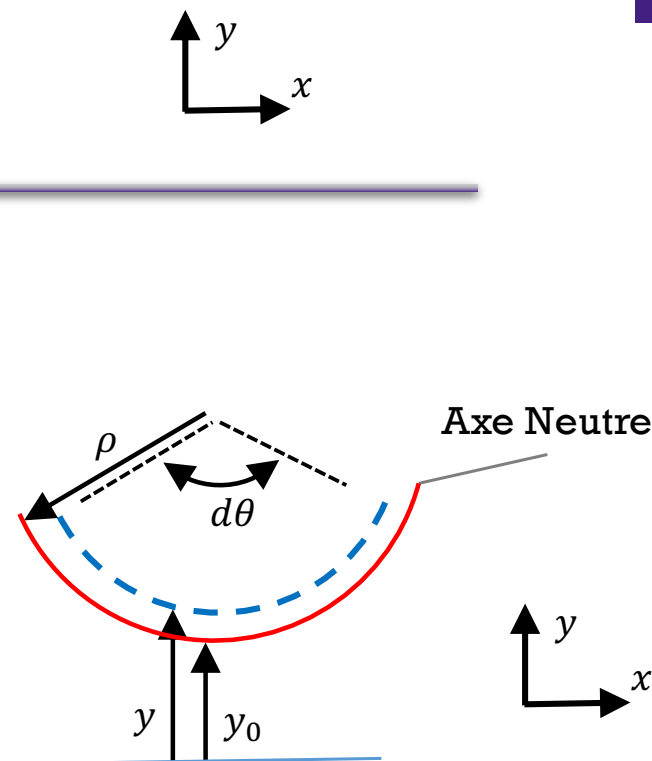
- Après déformation, l'axe neutre conserve sa longueur d'origine.
- tout autre ligne parallèle à l'axe neutre s'allonge ou se raccourcit.

$$ds_0 = \rho d\theta \text{ (longueur de l'axe neutre } y_0)$$

$$ds = (\rho - (y - y_0)) d\theta. \text{ longueur d'un axe parallèle à } y_0$$

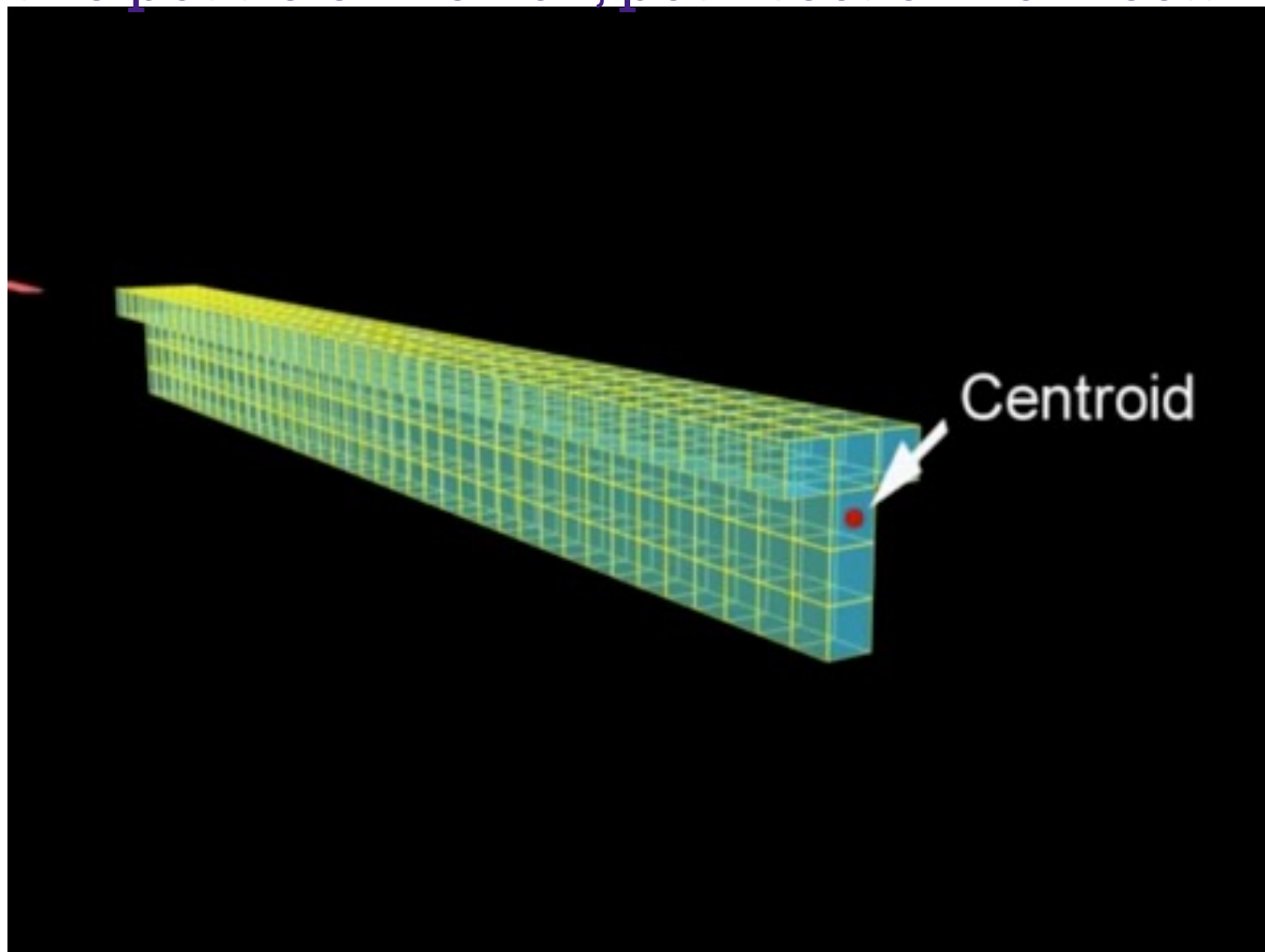
$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \rightarrow \boxed{\varepsilon_x(x, y) = -\frac{y - y_0}{\rho}}$$

- y_0 est la position de l'axe neutre (centroïde)



poutre flexion pure: pas de dépendance en x de ε_x

Déformation relative $\varepsilon_x(x, y)$ normale (= selon axe x) dans une poutre en flexion, pour section non rectangulaire



$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

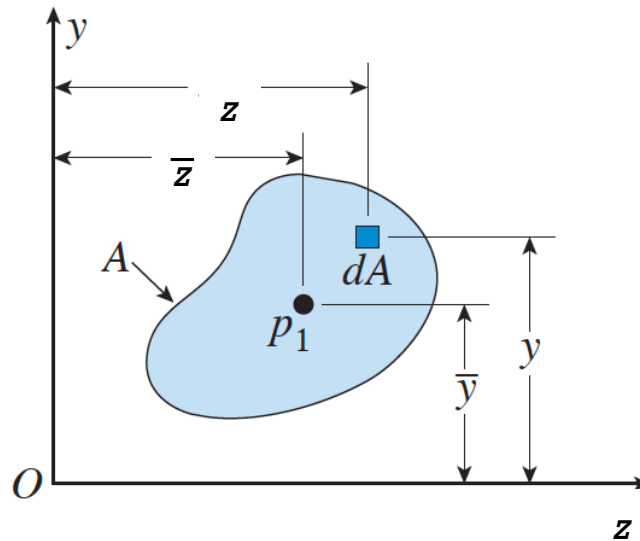
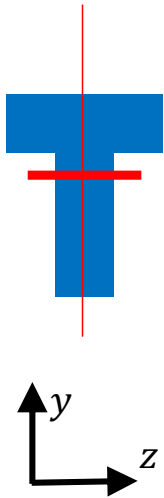
Visualisation de ε_x pour poutre avec section en T

L'axe neutre est toujours au centroïde, et donc pas nécessairement au milieu (en y) de la poutre.

<https://www.youtube.com/watch?v=Tfil ybn6be0>

Où est le Centroïde de la poutre?

Analyse de la section dans plan yz



Section d'une poutre

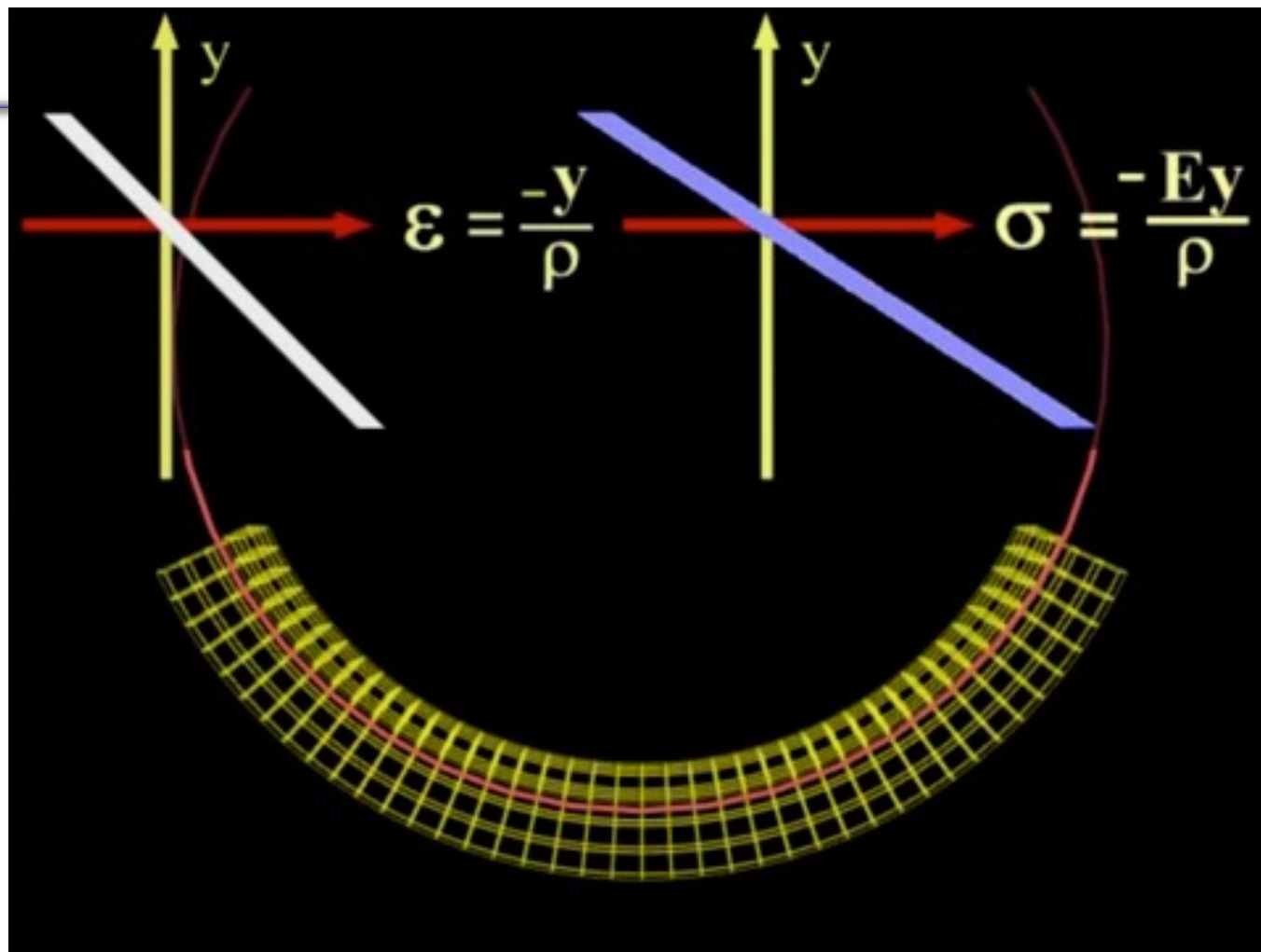
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

intégrales dans le plan yz. $dA = dy dz$

Centroïde = centre de masse

Nous n'allons calculer que \bar{y} dans ce cours car nos poutres ne bougent que dans la direction y

Contraintes normales $\sigma_x(y)$ dans une poutre en flexion



Loi de Hooke dans la poutre

Permet de lier $\epsilon_x(y)$ avec $\sigma_x(y)$

<https://www.youtube.com/watch?v=i23bk08PWpI>

Contraintes normales $\sigma_x(y)$

■ $\varepsilon_x(y) = -\frac{y-y_0}{\rho}$

■ la loi de Hooke:

$$\sigma_x(y) = E \varepsilon_x(y) = -E \frac{y-y_0}{\rho}$$

□ Rappelez-vous des matrices de souplesse et de rigidité

□ Ici simple car $\sigma_y = \sigma_z = 0$

Pour trouver σ et ε , il faut connaître la position de l'axe neutre y_0

Contraintes normales dans une poutre

- Pour une poutre en flexion pure : la contrainte normale est la seule contrainte induite par la flexion:

flexion pure
 $V = 0$
 $M = \text{constante}$

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nous avons des déformations relatives en x , et donc aussi en y et z !!

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y)}{E}$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \varepsilon_z(x, y) = -\nu \varepsilon_x(x, y)$$

Comment trouver l'axe neutre?

L'axe où $\sigma_x = 0$ (ici sans force axiale)

Prendre une section dans le plan yz , puis utiliser équations de la statique, sachant que la force axiale est 0 en flexion pure.

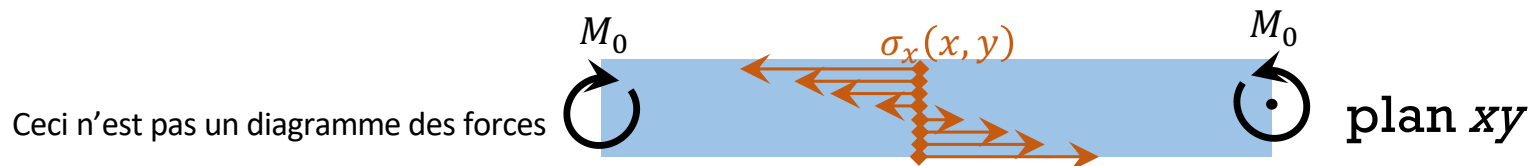
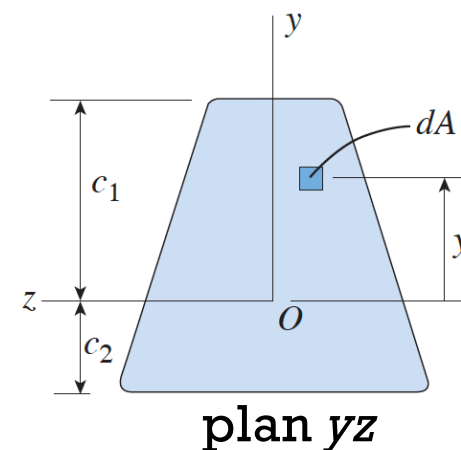
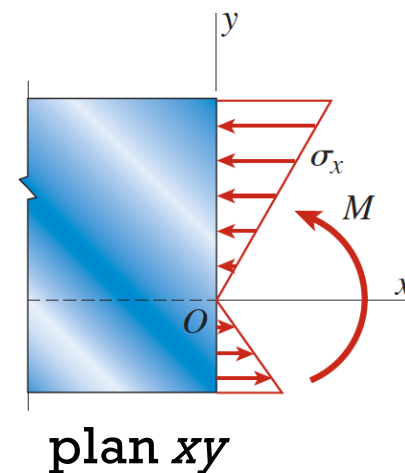
$$\sum F_x = N = 0$$

$$N = \int_A \sigma_x(x, y) dA = \iint -E \frac{(y-y_0)}{\rho} dy dz = 0$$

Et donc

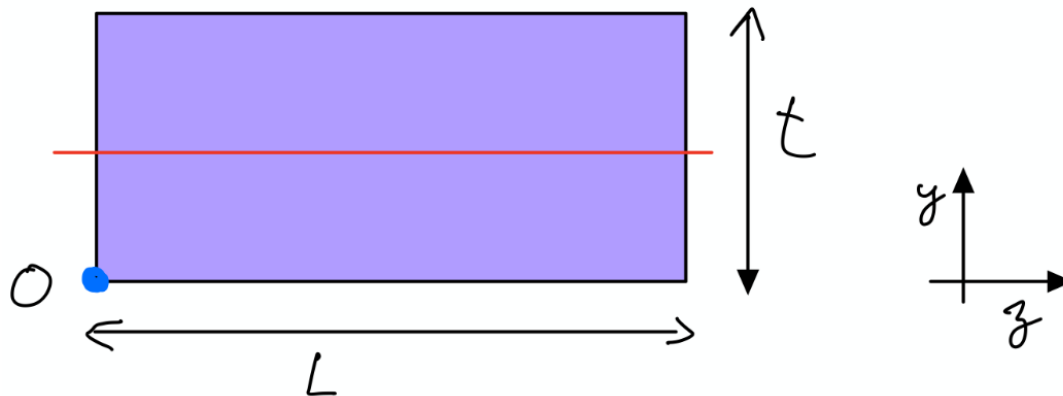
$$y_0 = \frac{\int y dy dz}{\int dy dz} \rightarrow \text{centroïde}$$

Les intégrales sont dans le plan yz



Ceci n'est pas un diagramme des forces

Exemple: calcul de l'axe neutre pour poutre de section rectangulaire



$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Les intégrales sont dans le plan yz

$$\int_A dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} dy dz = Lt$$

$$\int_A y dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} y dy dz = L \frac{t^2}{2}$$

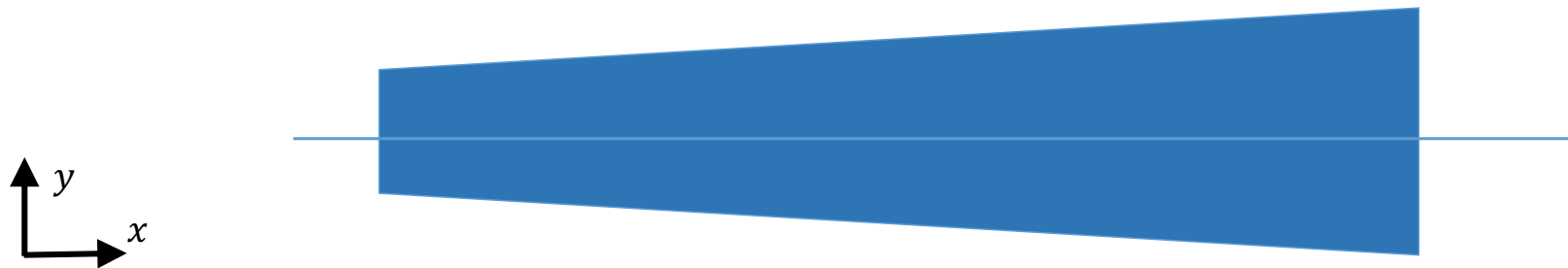
$$y_0 = \frac{L t^2 / 2}{Lt} = \frac{t}{2}$$

Ça dépend de
votre choix de
l'origine

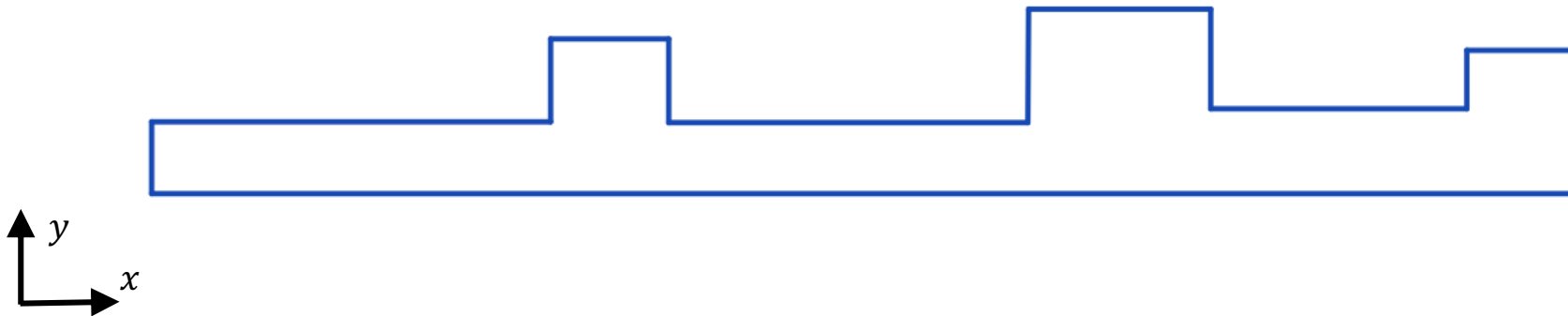
Notez que **vous choisissez l'origine** du système de coordonnées.

On pourrait choisir origine à $t/2$ pour avoir $y_0 = 0$

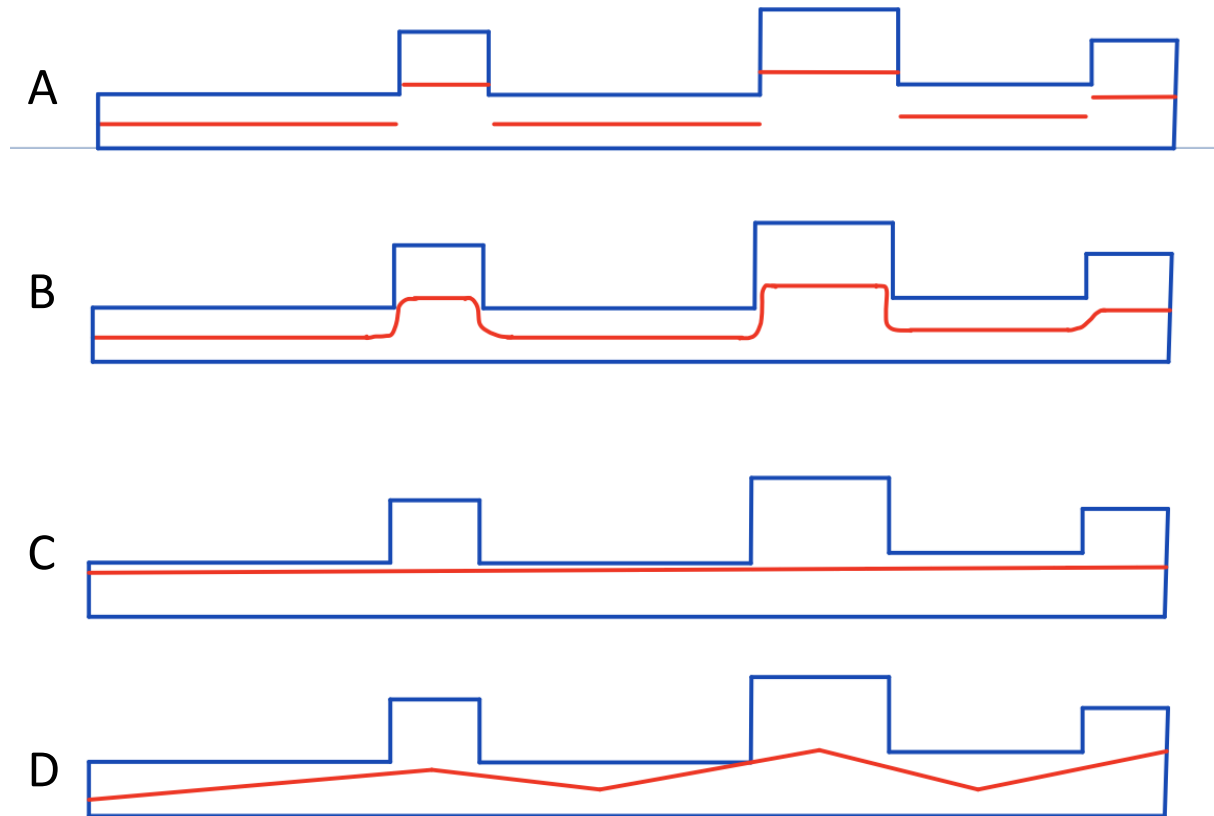
Axe neutre, sans force axiale: axe continue?



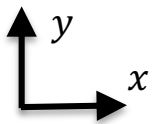
Que se passe-t-il si la section de la poutre change, et n'est pas symétrique



Quel Dessin est juste pour l'axe neutre ?



- A. A
- B. B
- C. C
- D. D
- E. autre



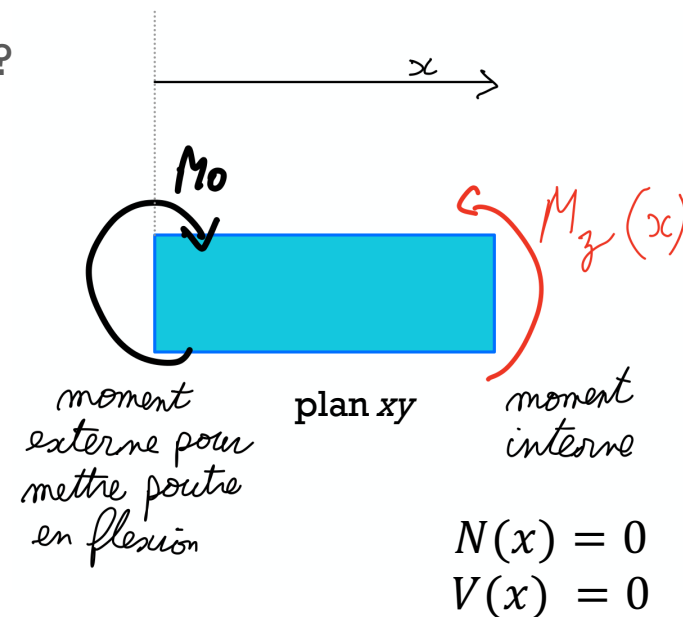
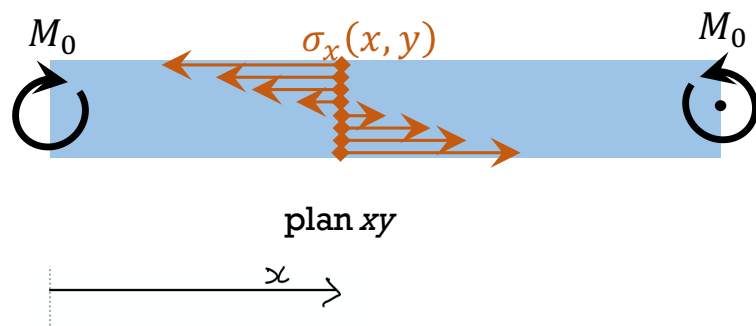
Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$

Poutre sur laquelle on impose moment M_0 à chaque extrémité

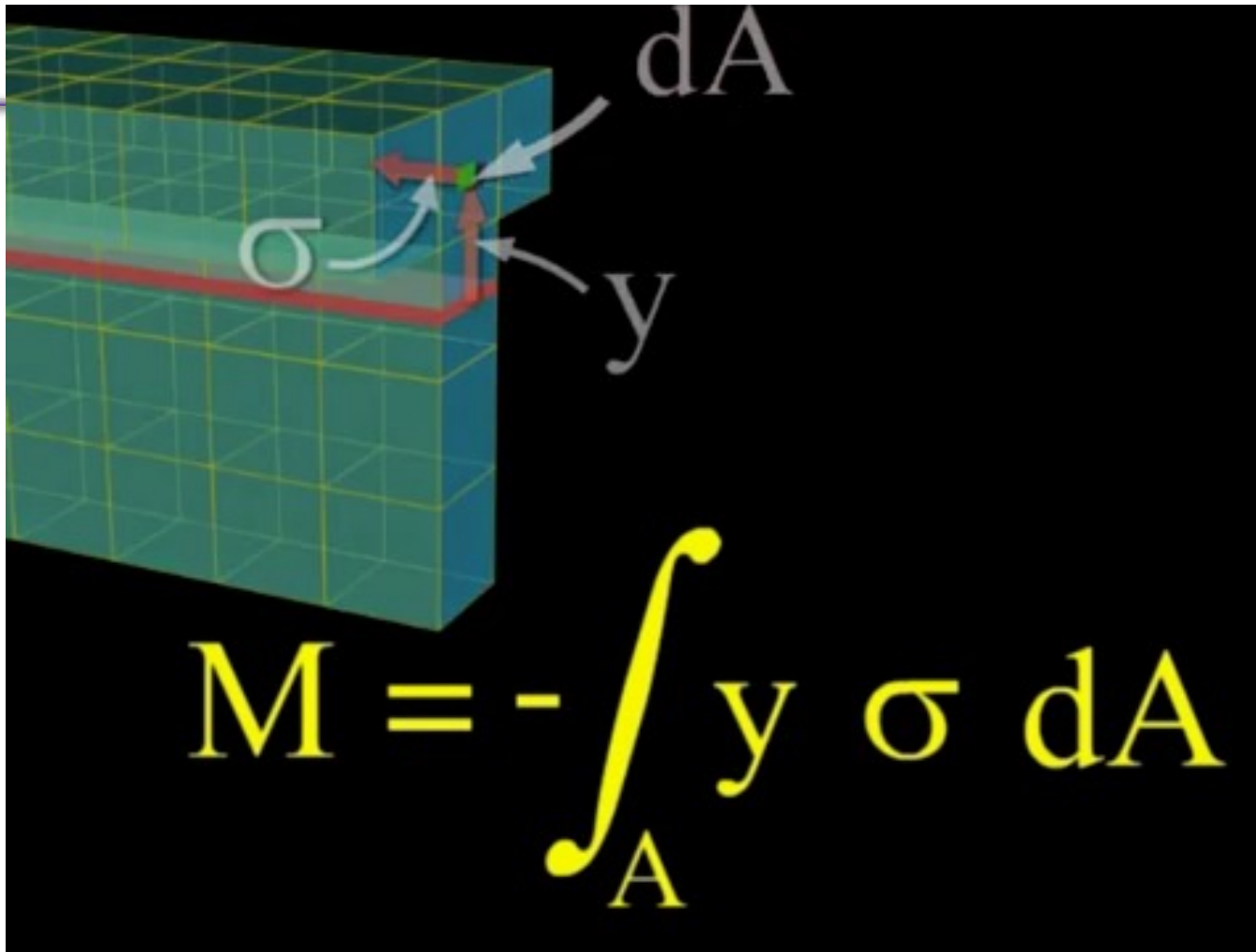
1. Pour trouver $M_z(x)$: "couper" la poutre (à x donné, selon axe y), puis utiliser équations de la statique pour trouver $M_z(x)$, le moment interne

$$\sum M_z = M_z(x) - M_0 = 0 \rightarrow M_z(x) = M_0$$

2. Puis: exprimer $M_z(x)$ en fonction de $\sigma_x(x, y)$. Mais comment?



Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$



The diagram shows a 3D perspective of a rectangular beam element. The beam is colored blue and green, with a grid pattern. A red line runs along the length of the beam, representing the neutral axis. A small rectangular area element dA is highlighted on the top surface. A coordinate system is shown with the y -axis pointing downwards from the neutral axis. A stress σ is indicated by a red arrow pointing to the right, perpendicular to the y -axis. Below the diagram, the equation for the bending moment M is given in yellow text on a black background:

$$M = - \int_A y \sigma \, dA$$

<https://www.youtube.com/watch?v=asBW0Ojc0bY>

Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et $M_z(x)$: le moment d'inertie et la courbure

(sans force axiale)

- Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales par rapport à l'axe neutre. Rappel: $\sigma_x(x, y) = -E \frac{y-y_0}{\rho}$

- Statique: donc $\sum M = 0$ sur chaque plan yz . $\int_{plan\ yz} Moments\ dA = M_z(x)$

- $M_z(x) = - \int \underbrace{\sigma_x(x, y)}_{\text{force}} (\underbrace{y - y_0}_{\text{bras de levier}}) dA = \int_{plan\ yz} \frac{E}{\rho} (y - y_0)^2 dydz$

- ainsi

$$M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z, y_0}$$

avec

$$I_{z, y_0} = \int (y - y_0)^2 dydz$$

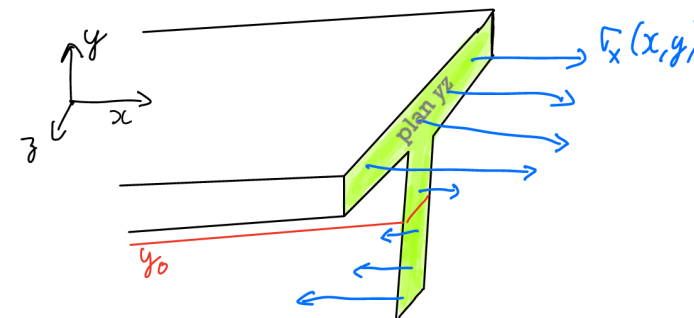
Ne dépend pas de masse
Ne dépend pas de E

$$\frac{M_z(x)}{I_{z, y_0}} = \frac{E}{\rho}$$

$$\sigma_x(x, y) = - \frac{M_z(x)}{I_{z, y_0}} (y - y_0)$$

Formule Flexion

- Si l'origine y a été choisi sur l'axe neutre, alors $y_0 = 0$



Semaine 6b – partie 2

Objectifs d'apprentissage de cette partie

- Lier contrainte et Moment de flexion par le moment d'inertie
- Trouver la contrainte maximale dans une poutre en flexion
- Calculer le moment d'inertie pour poutre de section assemblée de formes simples
- Trouver l'axe neutre pour poutre de section assemblée de formes simples

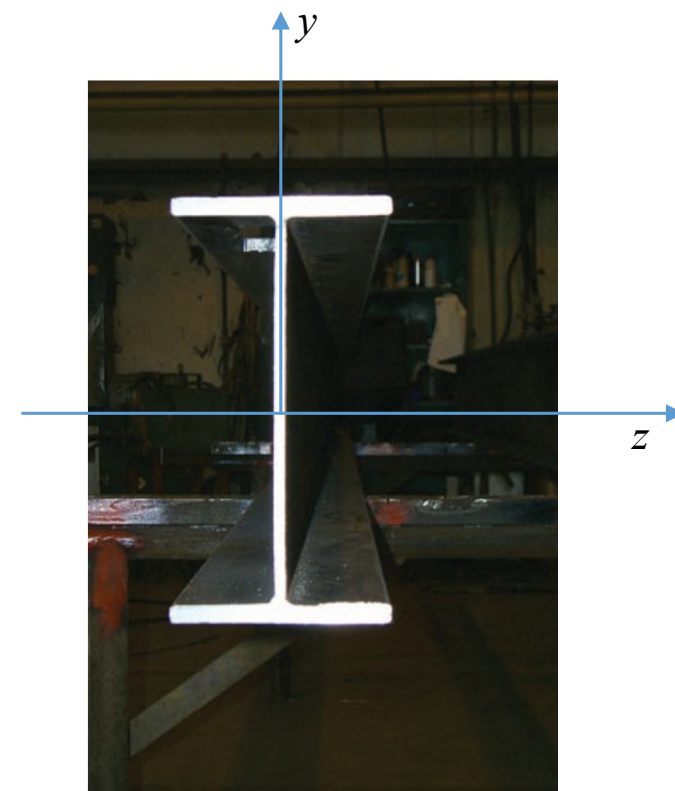
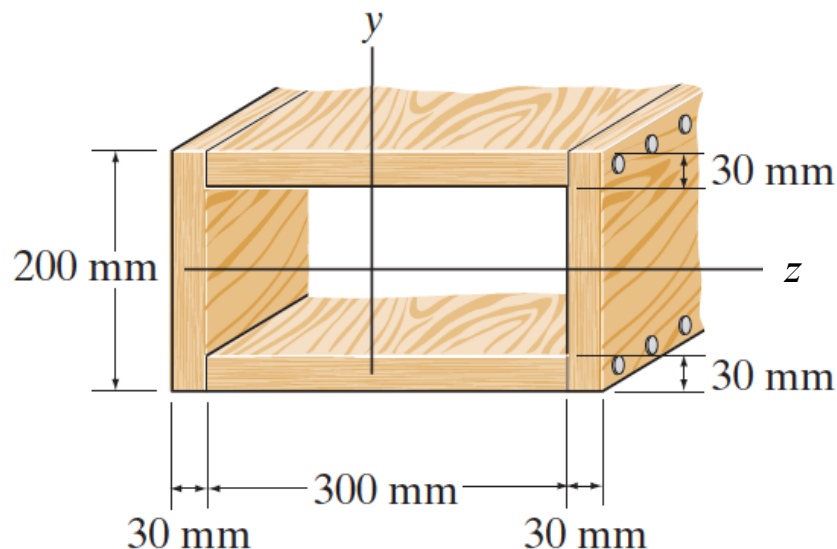
$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

Moment quadratique (moment d'inertie)

$I_{\text{axe, position sur l'axe}}$

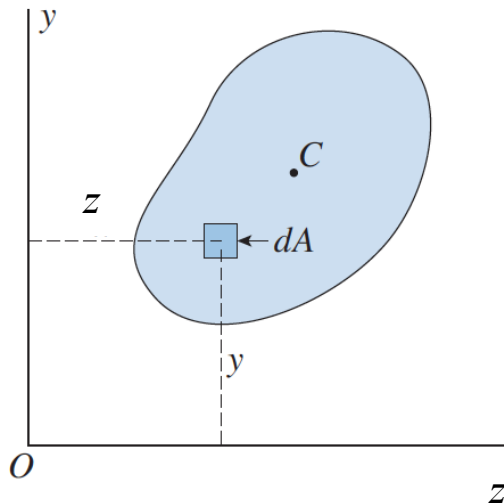
- Exprime la rigidité d'une géométrie à la flexion
- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend **pas** du matériau



Poutre: Axe long sur x , charge et déflexion sur y , **flexion autour de l'axe z**

Moment quadratique (moment d'inertie)

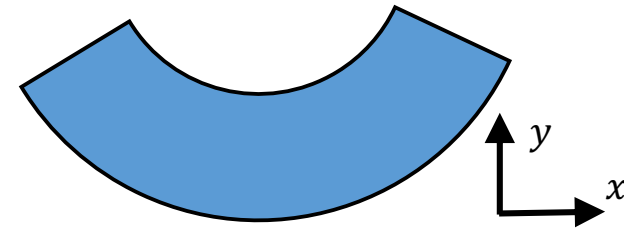
$I_{\text{axe, position-axe}}$



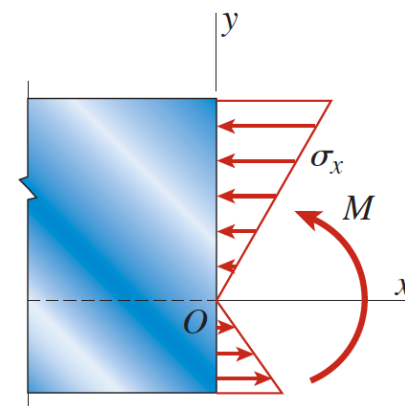
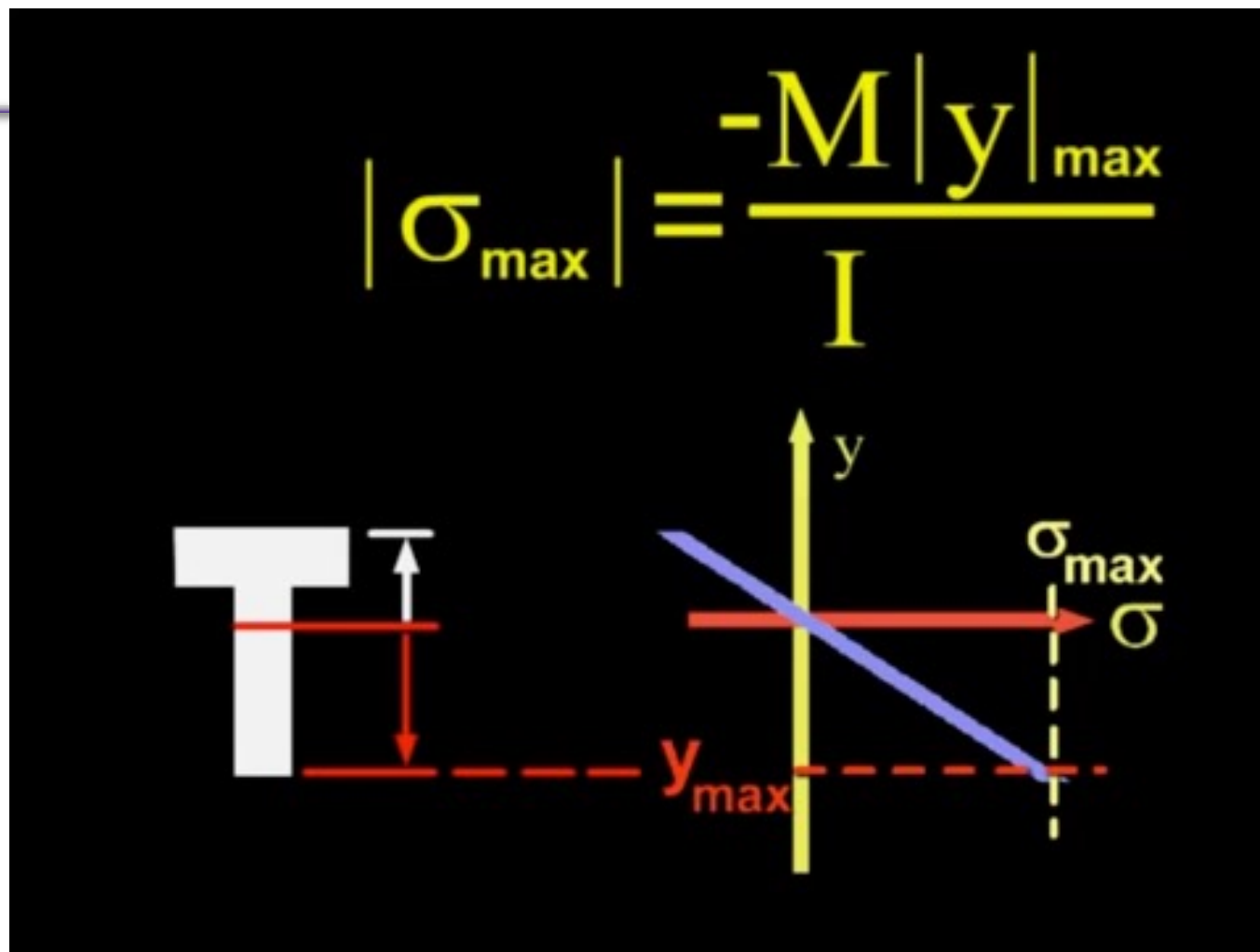
$$I_{z,y=0} = \int y^2 dA \quad I_{y,z=0} = \int z^2 dA$$

axe selon lequel on “enroule” ou « plie » la poutre.
ici, ce sera l'axe z, car moment de flexion sur l'axe z, et déflexion sur l'axe y.

- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend pas du matériau
- Nous aller “plier” à l'axe neutre: $I_{z,y=y_0}$



Contrainte MAXIMUM: toujours en haut ou en bas de la poutre



<https://www.youtube.com/watch?v=VDiNTuVKPSM>

Contrainte max dans un poutre en flexion pure

- Contrainte maximum:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \quad \rightarrow \quad |\sigma_{x,max}(x)| = |M_z(x)| \frac{c}{I_{z,y_0}} = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

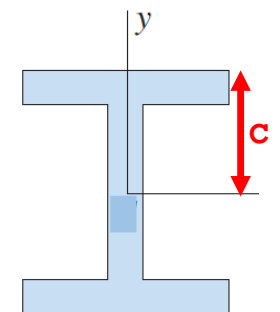
- c est la distance maximale entre l'axe neutre et bord de la poutre

- S est le *module d'inertie élastique*: donne l'efficacité d'une section transversale pour résister à la flexion

- $S = \text{elastic section modulus (in English)}$

- $S = I / c$

- grand $S \rightarrow$ petite contrainte générée pour un moment de flexion donné



https://en.wikipedia.org/wiki/Section_modulus

Section modulus equations^[3]

Cross-sectional shape	Figure	Equation	Comment
Rectangle		$S = \frac{bh^2}{6}$	Solid arrow represents neutral axis
doubly symmetric I-section (major axis)		$S_x = \frac{BH^2}{6} - \frac{bh^3}{6H}$ $S_x = \frac{I_x}{y},$ with $y = \frac{H}{2}$	NA indicates neutral axis
doubly symmetric I-section (minor axis)		$S_y = \frac{B^2(H-h)}{6} + \frac{(B-b)^3h}{6B}$ ^[4]	NA indicates neutral axis
Circle		$I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $c = \frac{d}{2}$ $S = \frac{\pi d^3}{32}$	Solid arrow represents neutral axis

Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre?

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

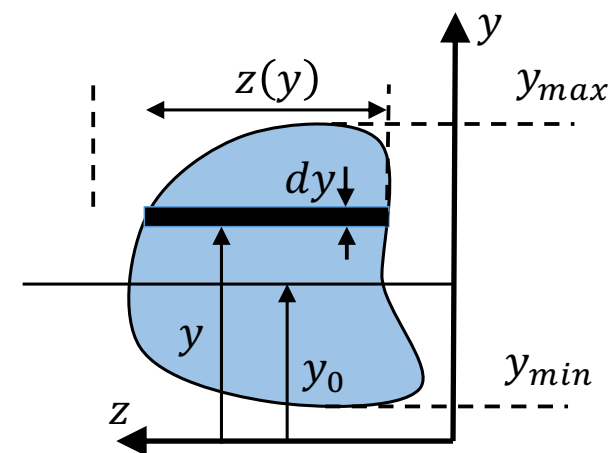
Centroïde

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} = \frac{\int_{y_{min}}^{y_{max}} y z(y) dy}{\int_{y_{min}}^{y_{max}} z(y) dy}$$

Moment d'inertie autour de l'axe z passant par y_0

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 dA = \int_{y_{min}}^{y_{max}} (y - y_0)^2 z(y) dy$$

I_{z,y_0} dépend de y_0



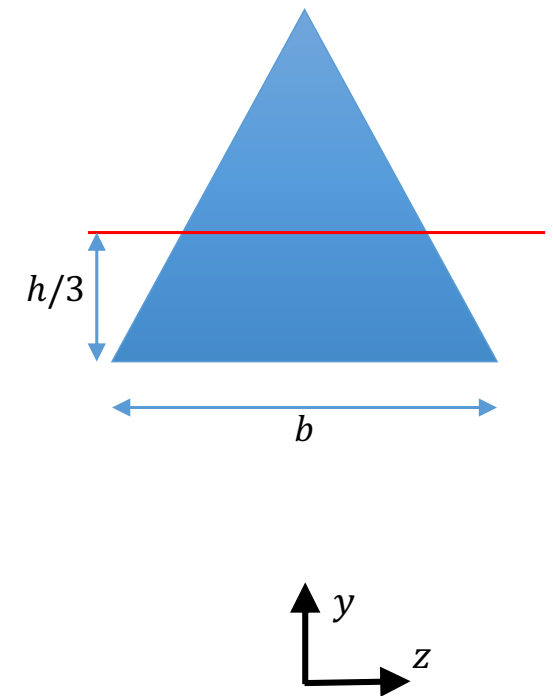
section de la poutre

Les intégrales sont dans le plan yz. Attention à l'origine que vous choisissiez.

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} = \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y z(y) dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} z(y) dy}$$

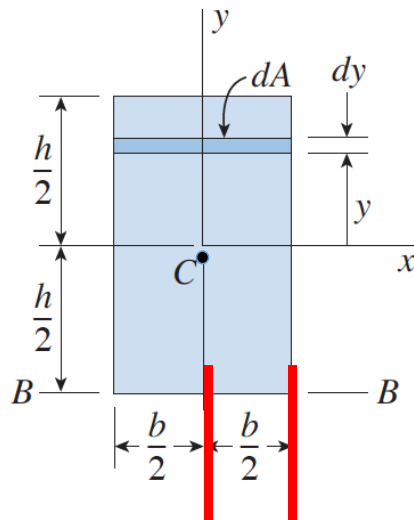
Attention aux bornes pour les intégrales dans le plan yz

- Si section rectangulaire: facile
- Si autre, pratique de passer par $z(y)$



Moment d'inertie (quadratique)

rappel

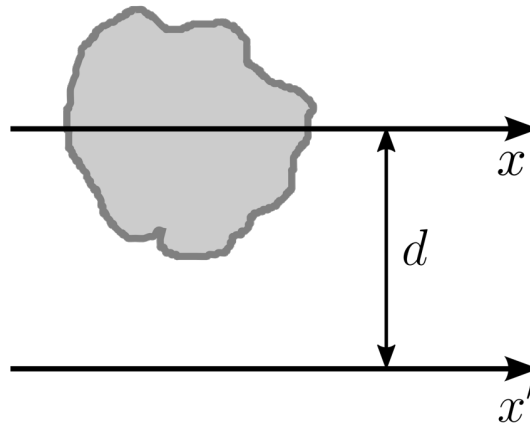


$$I_{y,x=0} = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{x,y=0} = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

- On « plie » selon un axe donné (exemple ci-dessus selon x ou y . Pour nos poutres avec l'axe long en x et la charge selon y , nous chercherons *toujours* I_z)
- Le choix de l'axe origine est important! Origine = axe ou on plie/tourne. Ici les axes passent par ce le centre de l'objet. $I_{y,x=0} \neq I_{y,x=b/2}$
- Si axe pas selon centre, utiliser Steiner = théorème des axes parallèles)

Steiner, si on déplace l'axe



$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

where

A is the area of the shape, and

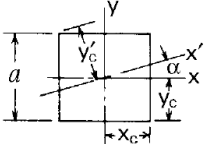
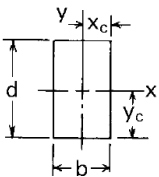
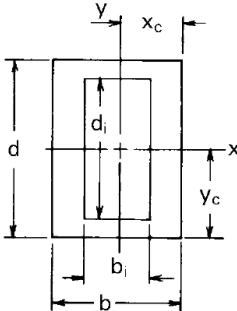
d is the perpendicular distance between the x and x' axes.

Bending moment of inertia

Roark's formulas for stress & strain,
W.C. Young, 8th ed, McGraw Hill

TABLE A.1 Properties of sections

NOTATION: A = area (length)²; y = distance to extreme fiber (length); I = moment of inertia (length)⁴; r = radius of gyration (length); Z = plastic section modulus (length³); SF = shape factor. See Sec. 8.15 for applications of Z and SF

Form of section	Area and distances from centroid to extremities	Moments and products of inertia and radii of gyration about central axes	Plastic section moduli, shape factors, and locations of plastic neutral axes
1. Square 	$A = a^2$ $y_c = x_c = \frac{a}{2}$ $y'_c = 0.707a \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$	$I_x = I_y = I'_x = \frac{1}{12}a^4$ $r_x = r_y = r'_x = 0.2887a$	$Z_x = Z_y = 0.25a^3$ $SF_x = SF_y = 1.5$
2. Rectangle 	$A = bd$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{1}{12}bd^3$ $I_y = \frac{1}{12}db^3$ $I_x > I_y \quad \text{if } d > b$ $r_x = 0.2887d$ $r_y = 0.2887b$	$Z_x = 0.25bd^2$ $Z_y = 0.25db^2$ $SF_x = SF_y = 1.5$
3. Hollow rectangle 	$A = bd - b_id_i$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{bd^3 - b_id_i^3}{12}$ $I_y = \frac{db^3 - d_ib_i^3}{12}$ $r_x = \left(\frac{I_x}{A}\right)^{1/2}$ $r_y = \left(\frac{I_y}{A}\right)^{1/2}$	$Z_x = \frac{bd^2 - b_id_i^2}{4}$ $SF_x = \frac{Z_x d}{2I_x}$ $Z_y = \frac{db^2 - d_ib_i^2}{4}$ $SF_y = \frac{Z_y b}{2I_y}$

Centroïde

Pas nécessairement dans l'objet

avec symétrie

Fig. 12-2

Area with one axis of symmetry

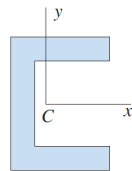


Fig. 12-3

Area with two axes of symmetry

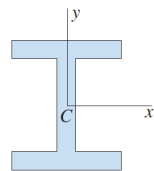
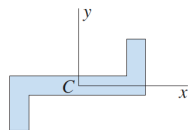
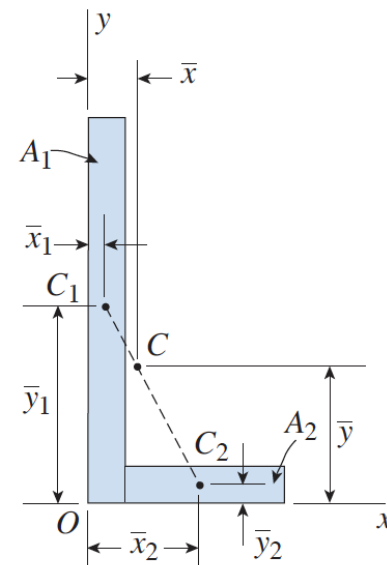


Fig. 12-4

Area that is symmetric about a point



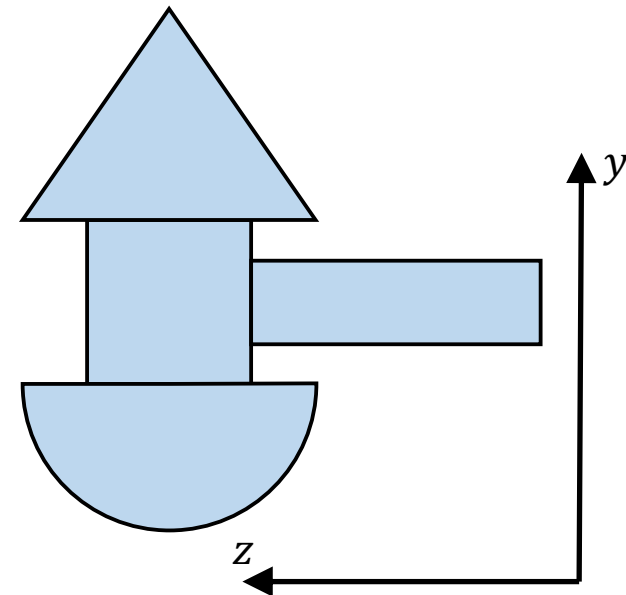
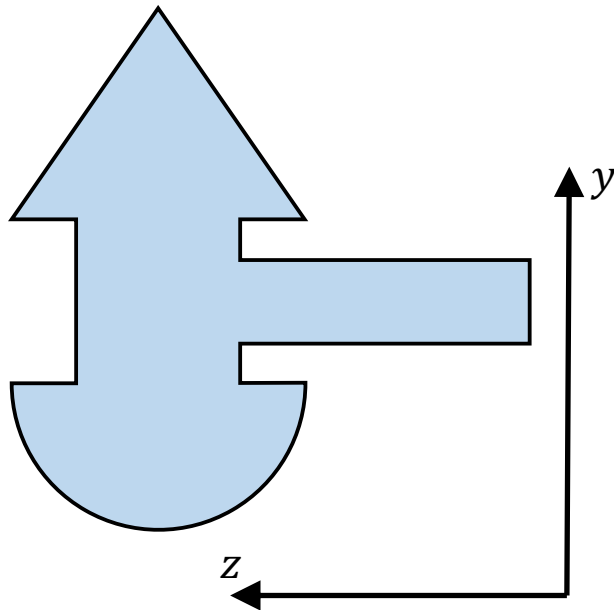
forme complexe



$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre plus complexe

section d'une poutre, union de différentes formes



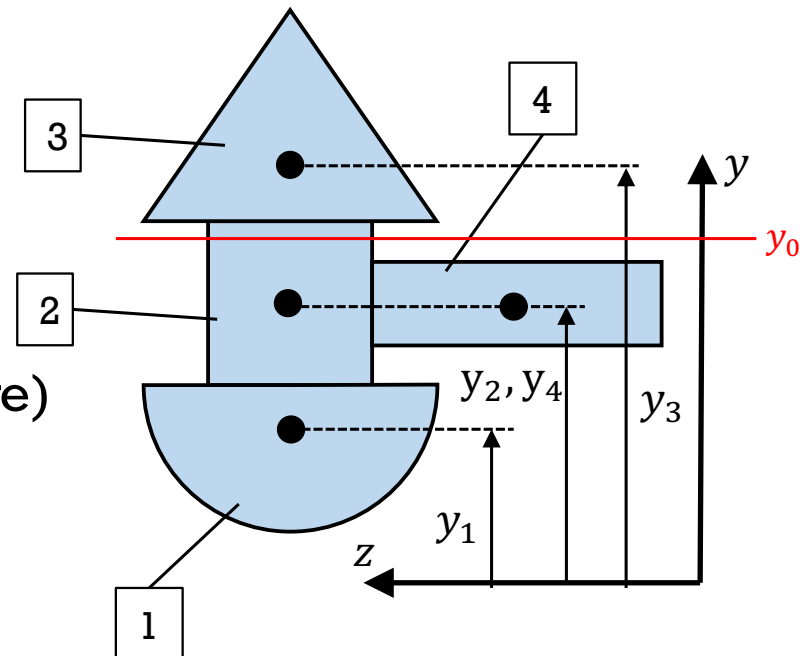
Assembler les morceaux pour trouver le centroïde et moment d'inertie I d'un objet complexe

- Centroïde d'un assemblage

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

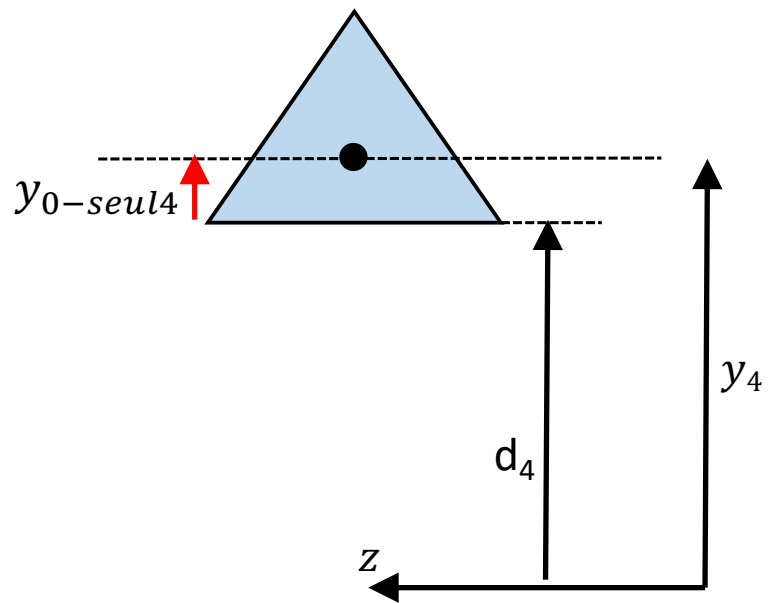
- Moment d'inertie (autour de l'axe neutre)

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

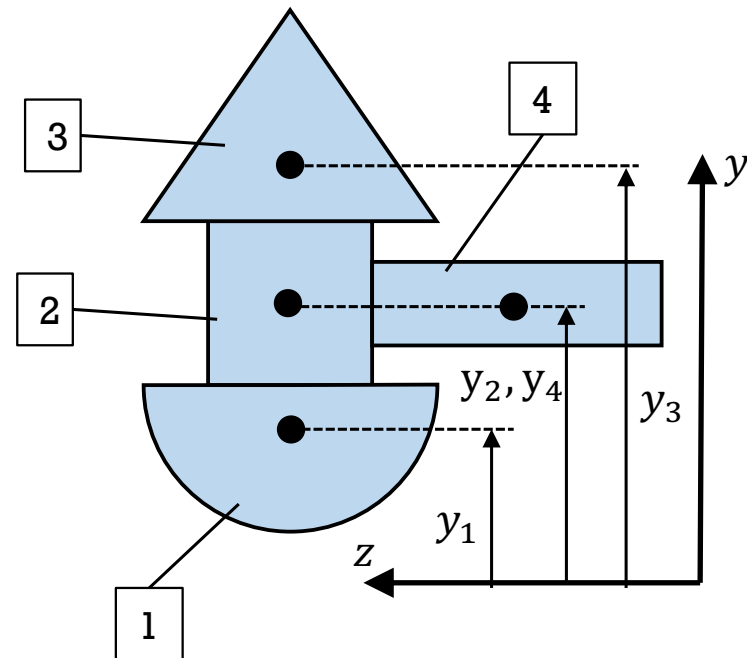


- on commence par analyser chaque sous-élément. A_i = aire de l'élément i
- y_i est le centroïde de l'élément i , par rapport à l'origine (pas par rapport à l'élément)
- I_{z,y_i} est le moment d'inertie de l'élément i , pour « plier » par l'axe qui passe par le centroïde de l'objet i . (c'est le I « intuitif » pour chaque élément)
- On peut soustraire les « trous »

- Centroïde d'un assemblage



$$y_4 = d_4 + y_{0-seul4}$$



$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

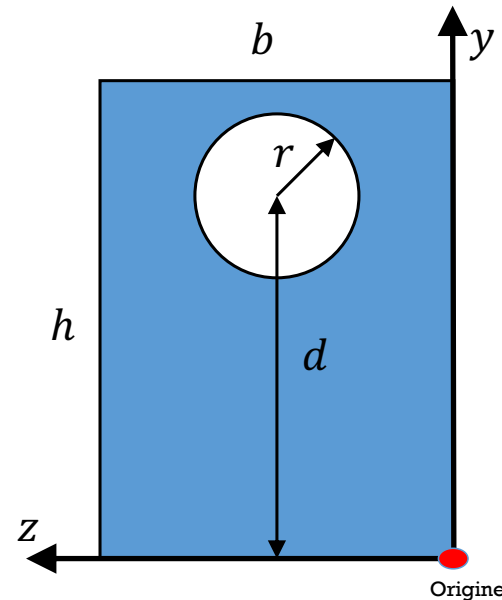
Exemple 0: Trouver S pour une poutre avec cette section

Rappel

$$S = I / c$$

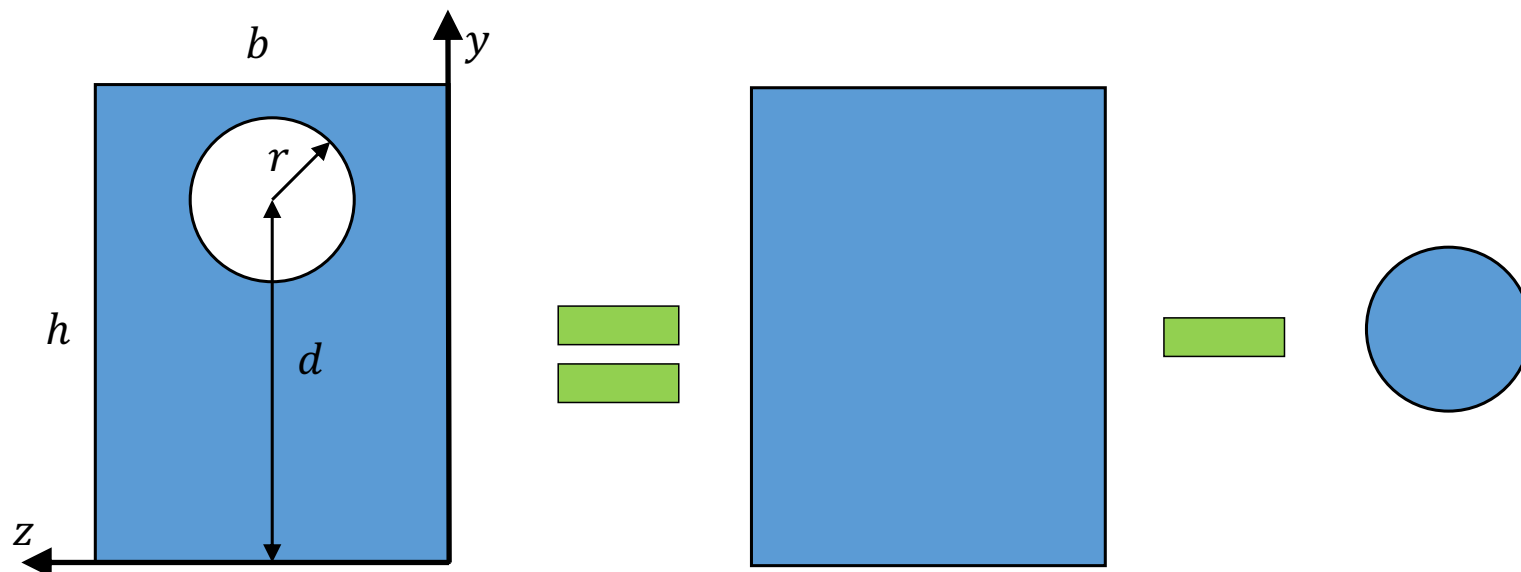
c est la distance maximale à l'axe neutre

Il nous faut donc trouver: I et c (et donc y_0)



Exemple 0

Solution. On décompose la forme complexe en 2 formes simples



$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

Exemple 0

Solution: calcul des centroïdes de chaque élément et de y_0

- Surfaces $A_{Rec} = bh$ Surface du rectangle

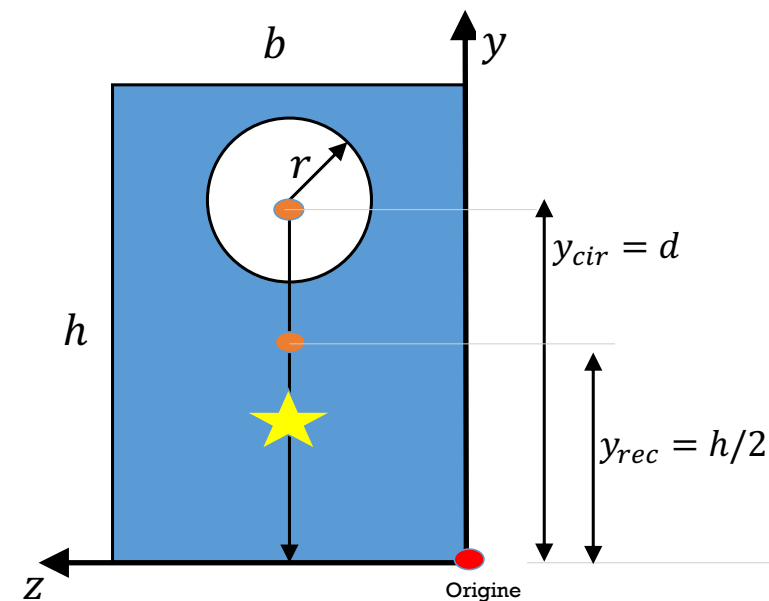
$$A_{Cir} = \pi r^2 \quad \text{Surface du cercle}$$

$$A_{tot} = A_{Rec} - A_{Cir} = bh - \pi r^2$$

$$y_{\text{élément}} = \frac{\int y dA}{\int dA} \rightarrow \text{centroïde}$$

- Centroïdes
(à partir de $y = 0$) $y_{Rec} = \frac{h}{2}$ Centroïde du rectangle

$$y_{Cir} = d \quad \text{Centroïde du cercle (pas } r/2 \text{ !)}$$



$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

$$y_0 = \frac{y_{Rec} A_{Rec} - y_{Cir} A_{Cir}}{A_{tot}} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) bh - d \pi r^2}{bh - \pi r^2}$$

$$y_0 = \frac{\frac{bh^2}{2} - \pi d r^2}{bh - \pi r^2}$$

Exemple 0

Solution: calcul du moment d'inertie complet

Moments d'inertie

$$I_{Cir} = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Moment d'inertie du cercle par l'axe passant par son centroïde y_{cir}

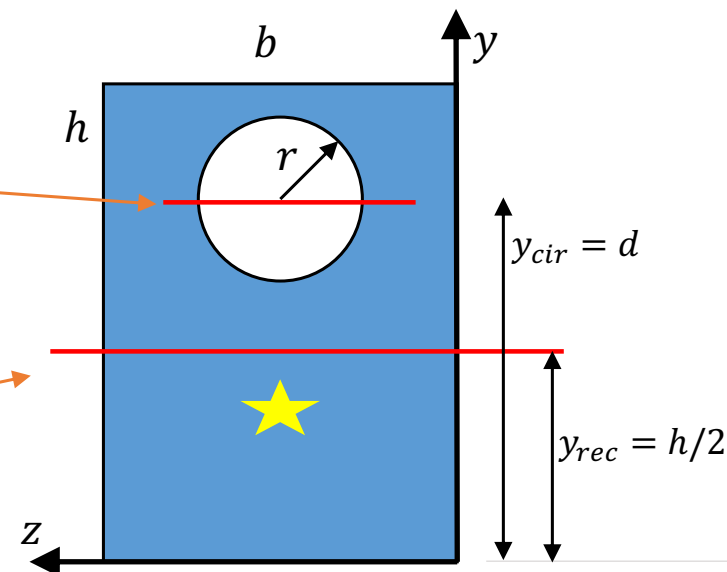
$$I_{Rec} = \frac{1}{12}bh^3$$

Moment d'inertie du rectangle par l'axe passant par son centroïde y_{rec}

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

$$I_{y_0} = I_{Rec} - I_{Cir} + A_{Rec}(y_{Rec} - y_0)^2 - A_{Cir}(y_{Cir} - y_0)^2$$

(puis algèbre)



$$y_0 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)bh - d\pi r^2}{bh - \pi r^2}$$

Exemple 0

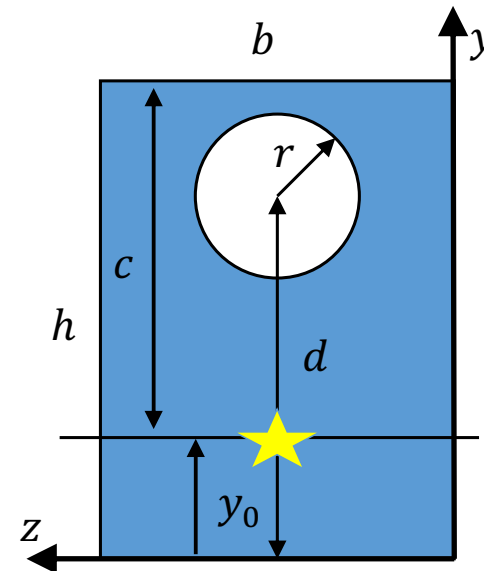
Finalement: calcul de c et de S

- Distance maximale de l'axe neutre

$$c = h - y_0$$

- et enfin, le module de section élastique

$$S = \frac{I_{y_0}}{c} = \frac{I_{y_0}}{h - y_0}$$

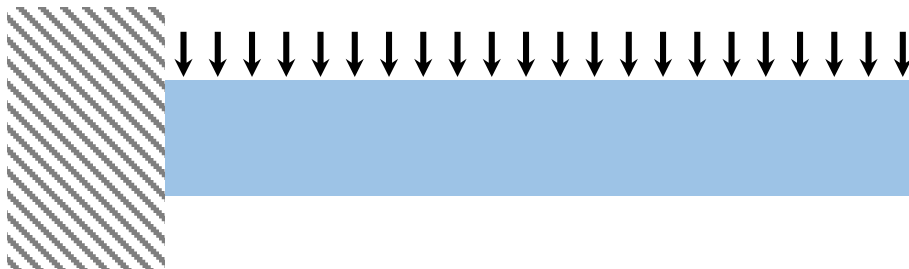


Exemple 1

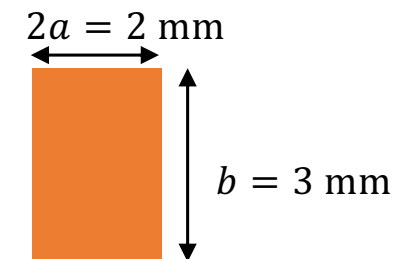
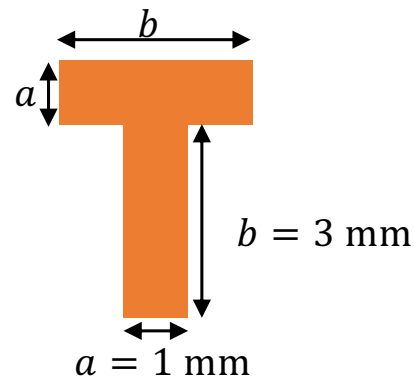
Deux poutres de section différentes sous une charge uniforme (propre poids)

Poutre encastrée. 2 poutres qui ont la même masse par longueur, mais pas la même section

Trouvez celle qui a le « S » le plus grand (c-à-d les contraintes les plus faibles)



$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{S}$$



les 2 poutre ont la même section (6 mm²)

Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

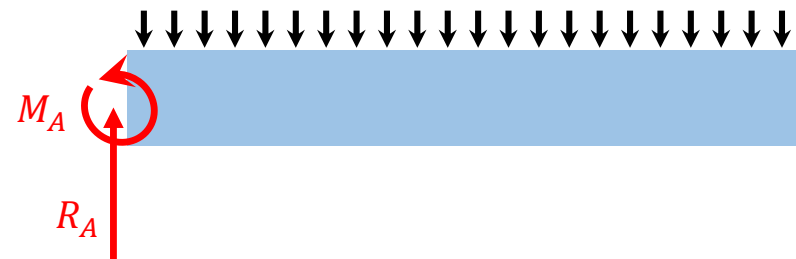
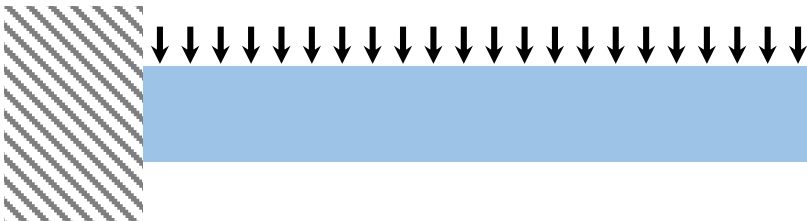
- Etape 1 - Nous calculons le moment de flexion $M_z(x)$, puis sa valeur maximale.
Poutre de section A , densité ρ

$$q(x) = \rho Ag$$

$$V(x) = \rho Ag(L - x)$$

$$M(x) = -\rho Ag \frac{(L - x)^2}{2}$$

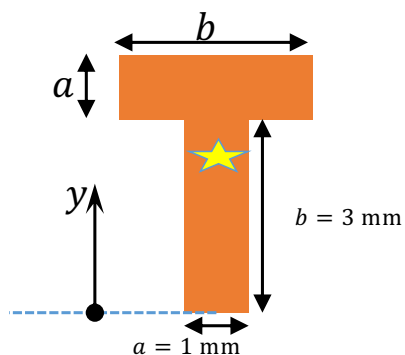
$$|M|_{Max} = |M(x = 0)| = \rho Ag \frac{L^2}{2}$$



Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

- Etape 2 – trouver a) la position y_0 de l'axe neutre, et b) la distance max c entre l'axe neutre et le bord de la poutre.

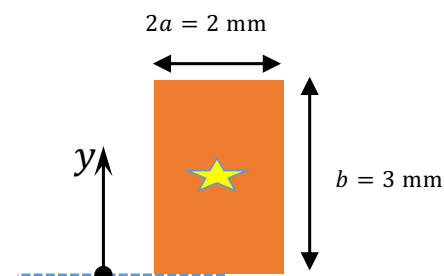


$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy}{2ab} = \frac{3b + a}{4}$$

$$c = y_0 = \frac{3b + a}{4} = 2.5 \text{ mm}$$

$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

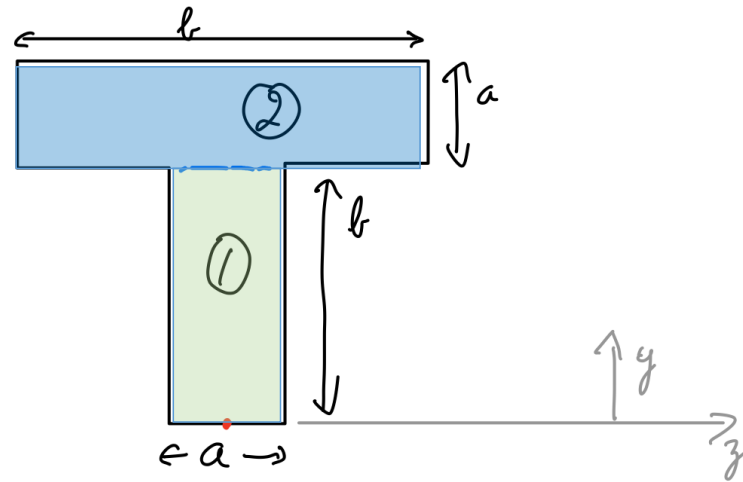


$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{b}{2}$$

$$c = y_0 = \frac{b}{2} = 1.5 \text{ mm}$$

(voir prochain
slide pour
l'intégrale)



$$A = ab + ab = 2ab$$

$$\int y dA = \int_{\textcircled{1}} y dA + \int_{\textcircled{2}} y dA$$

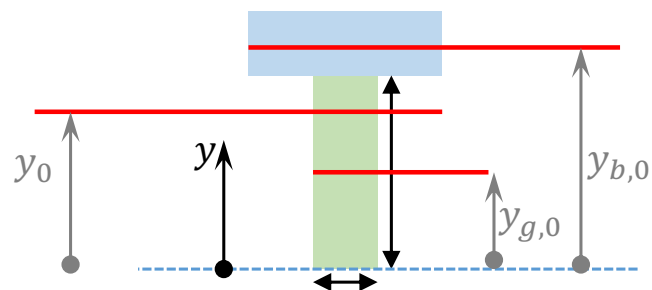
$$= \int_{z=-a/2}^{z=a/2} \int_{y=0}^{y=b} y dz dy + \int_{z=-b/2}^{z=b/2} \int_{y=b}^{y=b+a} y dz dy$$

$$= a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy$$

Exemple 1

Poutre sous charge uniforme

- Etape 3v1 - Nous calculons le moment d'inertie, selon z, de l'assemblage, utilisant Steiner



$$y_0 = \frac{3b + a}{4}$$

$$y_{g,0} = \frac{b}{2}$$

$$y_{b,0} = b + \frac{a}{2}$$

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

$$I_{z,y_0} = I_{green,y_0} + I_{blue,y_0}$$

$$= I_{green,y_{g,0}} + A_{green} \cdot (y_0 - y_{g,0})^2 + I_{blue,y_{b,0}} + A_{blue} \cdot (y_0 - y_{b,0})^2$$

$$I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + ab \left(\frac{b+a}{4} \right)^2 + ab \left(\frac{b+a}{4} \right)^2$$

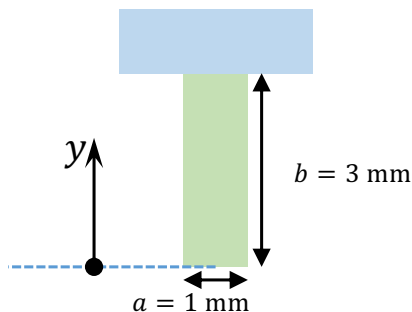
$$I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + \frac{ab(b^2 + 2ab + a^2)}{8} =$$

$$I_{z,y_0} = \frac{5ab^3 + 5ba^3 + 6a^2b^2}{24} = 8.5 \text{ mm}^4$$

Exemple 1

Poutre sous charge uniforme

- Etape 3v2 - Nous calculons le moment d'inertie (MÉTHODE alternative, par intégrale directement plutôt que par Steiner)



$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA = \int (y - y_0)^2 dz dy$$

$$I_{z,y_0} = I_{green,y_0} + I_{blue,y_0} = a \int_0^b (y - y_0)^2 dy + b \int_b^{b+a} (y - y_0)^2 dy$$

$$= a \left. \frac{(y - y_0)^3}{3} \right|_0^b + b \left. \frac{(y - y_0)^3}{3} \right|_b^{b+a}$$

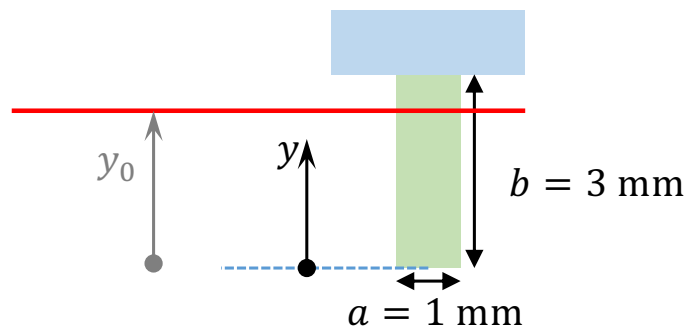
$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= \frac{a}{3} \left[\left(b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 + \left(\frac{3b+a}{4} \right)^3 \right] + \frac{b}{3} \left[\left(b+a - \frac{3b+a}{4} \right)^3 - \left(b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} [0.5^3 + 2.5^3 + 1.5^3 \cdot 3 - 3 \cdot 0.5^3] \text{ mm}^4 = 8.5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Exemple 1

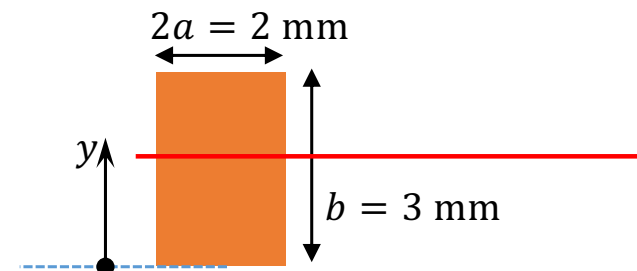
Poutre sous charge uniforme

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

- Etape 3 - Nous comparons les moments d'inertie, selon z



$$I_{z,y_0} = 8.5 \text{ mm}^4$$



$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= \int \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 dA = \\ &= 2a \int_0^b \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4} \right) dy = \\ &= \frac{ab^3}{6} = 4.5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

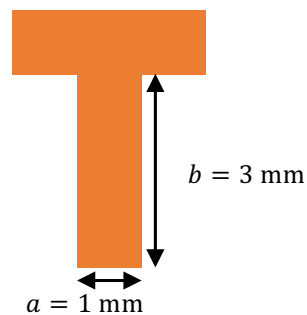
remarquez que $I_{\text{barre_en_t}}$ est presque 2x $I_{\text{barre_rectangulaire}}$

Exemple 1

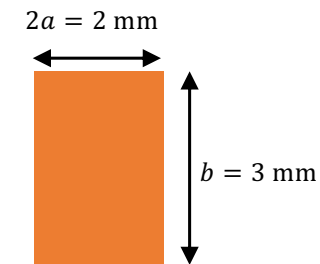
Poutre sous charge uniforme

$$S = \frac{I_{y_0}}{c} \quad |\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- Etape 4 - Nous calculons le module de section élastique S



$$S = \frac{8.5}{2.5} = 3.4 \text{ mm}^3$$

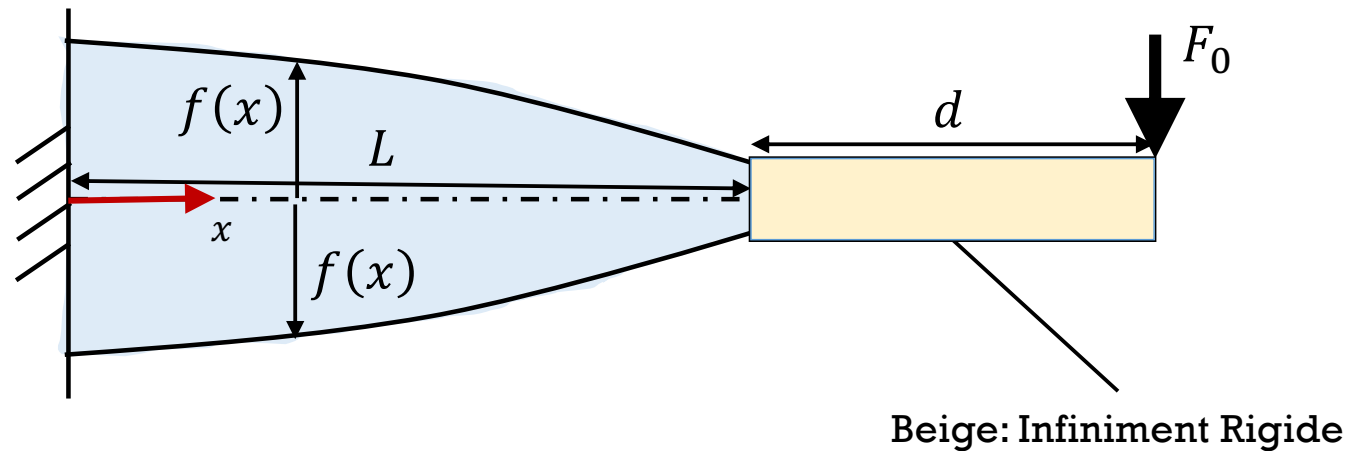


$$S = \frac{4.5}{1.5} = 3 \text{ mm}^3$$

- Il y aura donc des contraintes maximum très semblables pour les deux cas pour un même moment imposé, malgré le fait que la barre “en T” soit 2x plus rigide.
- Mais la barre en T aura une déflexion environ 2x plus faible

Exemple 2

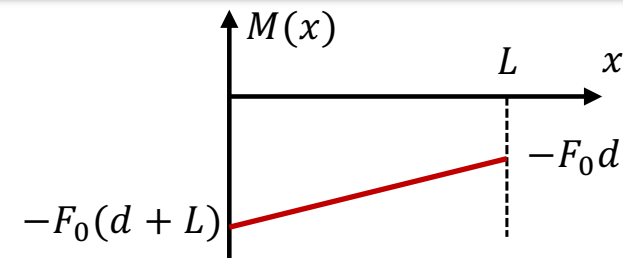
- Une poutre de section rectangulaire, de longueur L , largeur b et épaisseur $2f(x)$ est chargée comme indiqué par une Force F_0 .
- Trouvez $f(x)$ pour avoir la même contrainte maximum tout le long de la poutre bleue.



Solution 2

■ Moment de flexion: $M(x) = -F_0(d + L - x)$

■ Contrainte Maximum : $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c$



■ Moment d'inertie: $I_{z,y_0}(x) = \frac{1}{12} [2f(x)]^3 b$

■ Distance maximale de l'axe neutre: $c = f(x)$

■ Contrainte Maximum : $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{3F_0(d+L-x)}{2bf^2(x)} = \sigma_0$

■ $f(x) = \sqrt{\frac{3F_0(d+L-x)}{2b\sigma_0}}$

